XX Congresso U.M.I.
Siena, 7–12 settembre 2015

Problema di Chern-Yamabe

Daniele Angella[1]
Centro di Ricerca Matematica "Ennio de Giorgi"
Simone Calamai
Dipartimento di Matematica e Informatica "Ulisse Dini", Università di Firenze
Cristiano Spotti
Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge

Allo scopo di trovare metriche "canoniche" su varietà complesse, eventualmente non Kähleriane, introduciamo un analogo Hermitiano del problema di Yamabe.

Su una varietà complessa compatta X^n, fissiamo una classe conforme $\{\omega\}$ di metriche Hermitiane. Ci chiediamo se esiste $\omega' \in \{\omega\}$ con curvatura scalare rispetto alla connessione di Chern $S^{Ch}(\omega')$ costante. Studiamo lo spazio dei moduli

$$\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X, \{\omega\}) := \left\{\omega' \in \{\omega\} \ : \ S^{Ch}(\omega') \text{ è costante}\right\} / \mathcal{G}_X(\{\omega\}) \,,$$

dove $\mathcal{G}_X(\{\omega\})$ denota il prodotto del gruppo dei biolomorfismi di X che preservano la classe conforme $\{\omega\}$ per il gruppo $\mathbb{R}^+$ delle omotetie.

Il problema si riduce a risolvere un'equazione non lineare di tipo Liouville:

$$\Delta^{Ch} u + S = \lambda \exp(2u/n).$$

Infatti, se $S = S^{Ch}(\omega)$, allora $\omega' = \exp(2u/n)\omega$ ha curvatura scalare di Chern costante uguale a λ. Con opportune normalizzazioni, λ corrisponde al grado di Gauduchon $\Gamma_X(\{\omega\})$. Con tecniche analitiche standard, dimostriamo il seguente.

Teorema. *Sia X una varietà complessa compatta e sia $\{\omega\}$ una classe conforme di metriche Hermitiane su X. Se $\Gamma_X(\{\omega\}) \leq 0$, (ad esempio, se X ha dimensione di Kodaira non negativa,) allora $\mathcal{C}h\mathcal{Y}a(X, \{\omega\}) = \{p\}$.*

Diversamente dal classico problema di Yamabe, il problema non ha, in generale, una struttura variazionale: ciò accade solamente quando la classe conforme ammette come rappresentante una metrica bilanciata (nel senso di Michelsohn).

Nel caso di curvatura positiva, in generale, non si ha unicità, come segue da argomenti di teoria della biforcazione.

Bibliografia

[1] D. Angella, S. Calamai, C. Spotti, On Chern-Yamabe problem, `arXiv:1501.02638 [math.DG]`.

[1]Lavoro svolto nell'ambito dei progetti PRIN "Varietà reali e complesse: geometria, topologia e analisi armonica", FIRB "Geometria Differenziale e Teoria Geometrica delle Funzioni", SNS GR14 "Geometry of non-Kähler manifolds", e con il supporto del gruppo GNSAGA dell'INdAM.
E–mail: `daniele.angella@sns.it`.
Sezione 17: Geometria complessa.